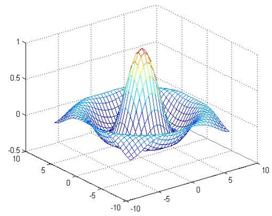
2016年第十三届五一数学建模联赛



题 目 C题：“二孩政策”问题

摘 要

本文针对“二孩政策”问题，采用模糊评价模型对人口结构进行评价，并采用PDE模型研究不同的生育政策对人口结构的影响，得到如下结论：若不实行“二孩政策”，未来A地区人口老龄化将十分严重，若实行“二孩政策”则将大大缓解老龄化问题，若全面开放生育政策，则在缓解老龄化的同时又会加重中年人口抚养的负担，同时造成就业难问题。

问题一，本文参考国际上人口问题的常用指标，利用因子分析法初选和SPSS变异系数进行数据差异性分析，力求指标具有科学、全面、代表性。最终在人口密度、性别比例、人口老龄化、自然增长率、城乡人口比例、总抚养率等指标上建立人口结构可持续发展指标体系。

问题二，本文采用熵权法计算相关指标的对应权重，并建立模糊评价模型，将人口结构分为4级。同时通过隶属函数找到模糊关系矩阵，由各地区相对于各级的隶属度值，得到各地区的综合评价。等级评价如下：北京、上海、广东、A地区属于第4级；湖北、山西、山东属于第3级；四川、云南、新疆属于第2级；吉林属于第1级。

问题三，本文通过建立灰色预测模型，根据附录中A地区的原始数据，通过MATLAB、C++编写程序求解，得到20年后A地区少年人口最多、中年人口其次、老年人口最少的年龄结构，和城镇人口逐年增加，农村人口逐年平稳、略有增加的情况。本文通过建立线性约束模型，令出生率满足限制条件的方法来求解使得A地区未来20年的人口结构更加合理的最优出生率，最终得到的最优出生率为13.1%。

问题四，本文建立人口结构的PDE模型，通过调整生育率参数的方法，反映二孩政策对人口所产生的影响，并对每年的人口进行推演得到未来20年的预测结果。由所得数据可知，随着二孩政策的开放，人口老龄化情况将随着时间的增加而有所减缓。

问题五，本文在问题四的基础上，通过修改生育率得到全面放开生育政策下的参数，并对每年的人口进行推演得到未来20年的预测结果。由所得数据可知，全面放开生育政策在一段中期时间内能有效降低人口老龄化的程度，但是同时青少年的比重将大大加重，将会对人口造成一定的就业以及生存负担。

本文最大的特色在于建立的灰色预测模型和PDE模型解决了对人口结构进行试验的困难，易操作、规范且节约成本，同时建立的模型可推广于人口问题的求解，对人口政策的制定起到一个参考的作用。

关键词：人口预测 熵权法 模糊评价 灰色预测 PDE模型

一、问题重述

多年来实施的严、紧计划生育政策对控制人口增长起到关键作用。在优生优育政策的指引下，我国人口质量显著提高，但也带来了不利影响，生育率偏低、男女比例失衡、人口老龄化情况严重等问题。2016 年，在全国范围内放开二孩政策。早在 20 年前，我国某些地区已经开始试点二孩政策。

本文运用多种定性定量方法相结合筛选指标、采用主客观相结合的方法对指标进行数据处理，统计分析，进而对人口可持续发展状况做出综合评分，从而更科学直观地分析区域内人口问题，并得出科学准确的结论。这对于政府制定区域人口及相关的社会经济政策具有重要的理论和现实意义。

问题 1：建立人口结构可持续发展指标体系，相关指标应具有科学性、代表性、全面性。

问题 2：建立人口结构可持续发展的评价模型。选取 10 个国内具有代表性的省（市、县），对这些地区的人口结构进行评价分级。并结合你的模型给出当前 A 地区评价等级。

问题 3：假设 A 地区不实行二孩政策，预测该地区未来 20 年的人口结构变化趋势；假设 A 地区实行二孩政策，给出二孩政策下最优出生率，使得该地区未来 20 年的人口结构更加合理。

问题 4：二孩政策下，预测 A 地区未来 10-20 年按年龄划分的人口结构。

问题 5：假如全面放开生育政策（不限制生育数量），在国民经济运行稳定的基础上预测 A 地区未来 20 年人口结构的变化趋势。

二、基本假设

1、假设社会经济平稳发展；

2、假设各地区的迁入迁出达到动态平衡；

3、没有大规模战争以及瘟疫传染性疾病；

4、假设所有表征和影响人口变化的因素都是在整个社会人口平均意义下确定的；

5、假设在短期内没有外来物种对人类的生存造成影响；

6、假设医疗水平，科学技术在未来相当长的时间内不会对人的死亡率造成影响；

7、假设所有数据足够准确；

三、符号说明

序号	符号	符号说明
1	B_t	生育率
2	B_{nt}	年龄为 n 的妇女生育率

3	P_t	第t年总的人口数量
4	P_{nt}	第t年年龄为n的人口数量
5	P_{bt}	第t年出生的人口数量
6	P_{dt}	第t年死亡的人口数量
7	d_t	死亡率
8	d_{nt}	年龄为n的死亡率
9	R_t	第t年女性人口比例
10	R_{nt}	第t年年龄为n的女性人口比例
11	I_t	受政策影响的调整因子
12	X_i	在i状态下的出生率

四、问题分析

4.1 问题一的分析

问题一要求建立人口结构可持续发展指标体系，相关指标应具有科学性、代表性、全面性。

本文首先结合国际标准和参考文献，初步选择评价指标，然后通过因子分析法确立人口结构可持续发展指标体系所用指标，并对选择的指标进行检验。再综合利用 SPSS 项目分析法筛选指标。最终确立人口结构可持续发展指标体系。

4.2 问题二的分析

问题二要求建立人口结构可持续发展的评价模型，并选取 10 个国内具有代表性的省（市、县），对这些地区的人口结构进行评价分级。并结合模型给出当前 A 地区评价等级。

首先本文参考问题一建立的人口结构可持续发展体系中的指标，选择人口密度、男女性别比、老年人口比例、自然增长率、城镇人口比例、总抚养比作为评价模型的评价指标，并采用熵权法确定各个指标的权重。然后建立模糊数学评价模型，参照国际上通行的一些标准对各个指标确定了评价标准，将人口发展情况分为 4 级；将线性函数作为隶属函数找到评价集和各个指标之间的模糊关系矩阵；将权重赋予各个指标得到最终的模糊评价模型。

在选取省份时，本文根据地理位置分布的不同选取北京、上海、广东、湖北、山西、四川、云南、新疆、吉林、山东作为有代表的地区。将以上 10 个省份以及 A 地区的 6 个指标数据代入模型即可得到该地区人口发展情况每级的隶属度，即可知该地区人口的发展情况。

4.3 问题三的分析

问题三要求在A地区不实行二孩政策的情况下预测该地区未来20年的人口结构变化趋势；以及在A地区实行二孩政策的情况下，给出二孩政策下最优出生率，使得该地区未来20年的人口结构更加合理。

对于第一个小问，在A地区不实行二孩政策，即没有政府政策影响A地区的生育率、出生率，本文通过建立灰色预测模型，通过MATLAB、C++编写程序求解相关参数。将出生率、死亡率以及城乡人口数量根据时间的发展做出未来20年的预测，并根据预测数据得到未来20年的人口结构分布。

对于第二个小问，为求得最优出生率，本文通过建立约束条件，利用人口预测公式，求出能使得X满足约束条件的解。并根据问题一中建立的人口可持续发展指标体系，对在该最优出生率条件下的20年后人口结构进行等级评价。

4.4 问题四的分析

问题四要求在A地区二孩政策下预测该地区未来10-20年按年龄划分的人口结构。

由于实行二孩政策会影响妇女的生育率，也即影响该地的出生率，因此本文先对生育率、出生率等参数进行预测，得到在实行政策下的参数，并建立PDE模型，通过对不同年龄阶段的人口数进行推演得到未来10-20年按年龄划分的人口结构。

4.5 问题五的分析

问题五要求在全面放开生育政策（不限制生育数量），在国民经济运行稳定的基础上，预测A地区未来20年人口结构的变化趋势。

在问题四的基础上，本文可以在PDE模型中通过修改对出生率、生育率等参数的预测，得到在全面开放二胎政策下的人口结构变化，并根据人口结构的增长型、稳定型、衰减型对人口变化趋势做出预测。

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型建立与求解

问题一要求建立人口结构可持续发展指标体系，相关指标应具有科学性、代表性、全面性。

本文认为由以下3个步骤构成：

步骤一:通过因子分析法确立人口结构可持续发展指标体系所用指标。

步骤二:再综合利用SPSS项目分析法筛选指标。

步骤三:确立人口结构可持续发展指标体系。

5.1.1 因子分析对体系用指标的确定

应用因子分析法确立评价体系所用指标由以下5个步骤构成：

步骤一:计算所有变量的相关矩阵。相关矩阵是因子分析直接要用的的数据，根据计算出的相关矩阵还应该进一步判断应用因子分析方法是否合适。

步骤二:提取因子。在这一步要确定因子的个数和求解因子的方法。

步骤三:进行因子旋转。这一步的目的是通过坐标变换使因子解的实际意义更容易

解释。

步骤四:计算因子值。因子值是各个因子在每个案例上的得分值，有了因子值可以在其他的分析中使用这些因子。

步骤五:进行因子检验，进行指标筛选，得到以下结果。

表 5-1 因子分析共同度表

<table>
<tr><td rowspan="5">因子分析的共同度</td><td>出生率</td><td>0.880</td><td>死亡率</td><td>0.889</td></tr>
<tr><td>自然增长率</td><td>0.931</td><td>男女性别比</td><td>0.991</td></tr>
<tr><td>总抚养比</td><td>0.889</td><td>人口密度</td><td>0.923</td></tr>
<tr><td>城市人口率</td><td>0.965</td><td>人口老化指数</td><td>0.957</td></tr>
<tr><td>少年抚养比</td><td>0.873</td><td>老年抚养比</td><td>0.872</td></tr>
<tr><td>*KMO*值</td><td colspan="2">0.812</td><td>公因子累计解释程度</td><td>95.42</td></tr>
</table>

在这里本文选择的指标筛选原则是：

（1）计算出相关矩阵后，应该对相关矩阵进行检验，如果相关矩阵中的大部分相关系数都小于 0.3，则不适合作因子分析；如果反映像相关矩阵中很多元素的值比较大的话，应该考虑该观测数据可能不适合做因子分析；巴特利特球体检验如果不能拒绝该假设的话，应该重新考虑因子分析的使用；KMO 测度值较小时，表明观测变量不适合做因子分析。其中标准值在 0.9 以上，非常好；0.8 以上，好；0.7，一般；0.6，差；0.5，很差；0.5 以下，不能接受。

（2）一般提取的因子数应使因子积累解释方差的比例达到 70-80 以上。

（3）公因子方差越大，变量能被因子说明的程度越高。

（4）在满足以上几个原则时，必须结合研究所处的实际情况，如研究对象的特殊性、研究目标的针对性、研究环节的衔接性、数据收集的难易程度等方面进行指标的调整与整合，以增强模型的可操作性。

根据筛选原则和因子分析结果，可知本文选择出生率、死亡率、人口自然增长率、城市人口率、男女性别比、总扶养比等 10 个指标构建人口综合发展模型是可行的。

5.1.2 人口结构可持续发展指标体系的建立

根据 SPSS 软件计算指标的变异系数情况，可知当变异系数越大时，说明该指标在该准则层中的分布变异性越大。指标的信息分辨能力就越强，应当保留该指标；反之，则越弱，应从指标体系中予以剔除。

经过筛选，本文得到的人口结构可持续发展指标体系如下：

表 5-3 人口结构可持续发展指标体系

综合体系	影响指标
人口结构	人口密度
	性别比例
	人口老化指数
	出生率
	死亡率
	自然增长率
	城市人口率
	总抚养比
	少年抚养比
	老年赡养比

5.2 问题二模型建立与求解

首先本文参考问题一建立的人口结构可持续发展体系中的指标，选择人口密度、男女性别比、老年人口比例、自然增长率、城镇人口比例、总抚养比作为评价模型的评价指标，并采用熵权法确定各个指标的权重。然后建立模糊数学评价模型，参照国际上通行的一些标准对各个指标确定了评价标准，将人口发展情况分为 4 级；将线性函数作为隶属函数找到评价集和各个指标之间的模糊关系矩阵；将权重赋予各个指标得到最终的模糊评价模型。

在选取省份时，本文根据地理位置分布的不同选取北京、上海、广东、湖北、山西、四川、云南、新疆、吉林、山东作为有代表的地区。将以上 10 个省份以及 A 地区的 6 个指标数据代入模型即可得到该地区人口发展情况每级的隶属度，即可知该地区人口的发展情况。

5.2.1 熵权法确定权重

步骤一：针对十个省份的六个人口指标按照定性和定量相结合的原则，得到相关指标判断矩阵 $R=\begin{Bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{nm} \end{Bmatrix}$。

步骤二：对判断矩阵 R 进行标准化处理，得到标准化矩阵 $B=(b_{ij})_{n*m}$，其中 $b_{ij}\in[0,1]$，存在三种情况的处理方法。

（1）当 r_{ij} 是正向型指标，即指标越大表示的状态越优的时候， $b_{ij}=\dfrac{r_{ij}-r_{\min}}{r_{\max}-r_{\min}}$

（2）当r_{ij}是逆向型指标，即指标越小表示的状态越优的时候，$b_{ij}=\frac{r_{\max}-r_{ij}}{r_{\max}-r_{\min}}$，

（3）当r_{ij}是适度指标时，假设$[a,b]$为最优适度区间，则有

$$b_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{\max(a-r_{ij},r_{ij}-b)}{\max(a-r_{\min},r_{\max}-b)},r_{ij}\notin(a,b)\\1,\ r_{ij}\in(a,b)\end{cases}$$

其中，$r_{\max}$，$r_{\min}$为同一评价指标下不同对象中最优者或最差者。

步骤三：熵权值的确定

定义对第j个评价指标的熵为

$$H_J=-\frac{\sum_{i=1}^{m}f_{ij}*Lnf_{ij}}{Lnm},i=1,2,\ldots,n$$

上式中$f_{ij}=\frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}b_{ij}}$，当$f_{ij}=0$时，$Lnf_{ij}$无意义，因此对$f_{ij}$计算加以修正，定义为

$f_{ij}=\frac{1+b_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}(1+b_{ij})}$。

计算各评价指标的熵值$W=(w_i)_{1*n}$，其中$w_i=\frac{1-H_i}{n-\sum_{i=1}^{n}H_i}$，且满足$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$，可以得到下表：

表 5-4 六个指标权重

指标	人口密度	男女性别比	老年人口比例	自然增长率	城镇人口比例	总抚养比
权重	0.1896	0.1202	0.1336	0.1444	0.2498	0.1623

5.2.2 模糊数学评价模型的建立

步骤一：选择评价集

本文采用参照国际上通行的一些标准，对人口综合发展各指标确定了评价标准，并建立评价集如下表：

表 5-5 国际评价标准解释

	人口密度（人/平方公里）	男女性别比	城市人口率（%）	总抚养比（%）	自然增长率（%）	人口老化指数（%）
1 级	≥ 1500	≤ 1	≤ 25	≥ 68	≤ 3	≥ 10
2 级	≤ 500	≥ 1.07	$25-45$	$44-68$	≥ 10	$8-10$
3 级	$500-1000$	$1-1.03$	$45-60$	$35-44$	$5-10$	$6-8$
4 级	$1000-1500$	$1.03-1.07$	≥ 60	≤ 35	$3-5$	≤ 6

步骤二：建立十个省份的因素集$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$。并建立评价集$V=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$。

步骤三：找出因素论域Y和评价论域V之间的模糊关系矩阵$R=Y\times V\in[0,1]$。在这里本文采用最常用的线形函数为隶属函数来确定模糊关系矩阵。

步骤四：综合评价。由于对Y中各因素有不同的侧重，因此需要对每个因素赋予不同的权重，将已经计算好的熵权重赋予每个因素，并将它表示为Y上的一个模糊子集$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$，其中a_i为第i个因素对y_i所对应的权重，并且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,a_i\geq 0$。在$R$与$A$求出后，则综合评价为$B=A\circ R$，式中“$\circ$”为模糊合成算子。

5.2.3 模糊数学评价模型的求解

根据评价集中的四级评价标准分别构建不同指标的隶属函数，以人口密度指标为例，其四个级别的隶属函数为:

$$y_1=\begin{cases}1,x\leq 10\\ \dfrac{250-x}{240},10\leq x\leq 250\\ 0,x\geq 250\end{cases},\quad y_2=\begin{cases}\dfrac{x-10}{240},10\leq x\leq 250\\ \dfrac{1000-x}{750},250\leq x\leq 1000\\ 0,x\geq 1000\end{cases}$$

$$y_3=\begin{cases}\dfrac{x-250}{750},250\leq x\leq 1000\\ 0,x\geq 1000\end{cases},\quad y_4=\begin{cases}1,x\geq 1000\\ 0,x\leq 1000\end{cases}$$

其余五个指标的隶属函数附在附录 5 中。

将计算好的权重值代入，可以得到十个城市的模糊综合评价如下表：

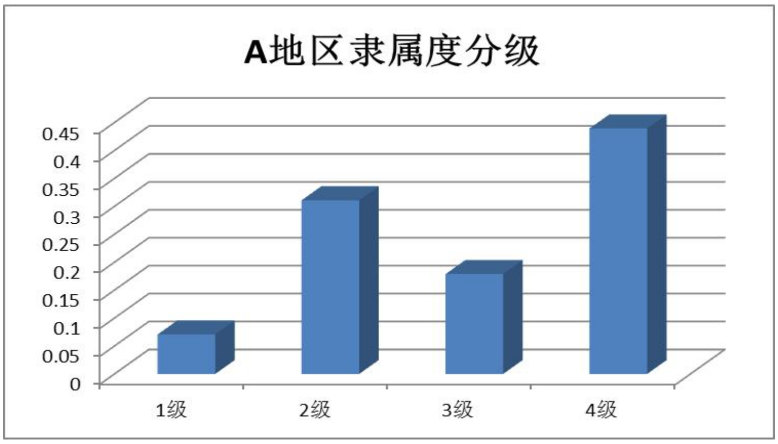
表 5-6 十个城市模糊综合评价

	隶属度			
	1 级	2 级	3 级	4 级
北京	0.0067	0.1113	0.2442	0.6445
上海	0.0125	0.1994	0.0191	0.7361
广东	0.0087	0.3275	0.2286	0.4439
湖北	0.0122	0.3343	0.5749	0.0072
山西	0.0166	0.3968	0.4236	0.1630
四川	0.3202	0.5007	0.0491	0.1300
云南	0.1459	0.8081	0.2736	0.0347
新疆	0.1872	0.5328	0.2800	0.0032
吉林	0.3040	0.2697	0.2641	0.1623
山东	0.1336	0.2262	0.5571	0.0831

从上表可知，北京、上海、广东属于第 4 级，其中北京属于 4 级偏上水平，广东属于 4 级中等水平；湖北、山西、山东属于第 3 级，且均属于 3 级中等水平；四川、云南、新疆属于 2 级水平，其中云南属于 2 级偏上水平，四川、新疆属于二级中等水平；吉林属于 1 级水平。

同时对 A 地区进行评价分析，得到：

图 5-1 A 地区模糊综合评价



由上图可知，A 地区属于第 4 级，且处于中等水平。

5.3 问题三模型建立与求解

对于第一个小问，在 A 地区不实行二孩政策，本文根据历年来的数据，通过建立灰色预测模型，将出生率、死亡率以及城乡人口数量根据时间的发展做出未来 20 年的预测，并根据预测出出生率、死亡率数据推算出 A 地区第 20 年各年龄段的人口数量，得到未来 20 年的人口结构分布。

对于第二个小问，A 地区实行二孩政策，则会影响该地区的出生率，本文根据上述约束条件所反映的关系，假设出生率为 X，则利用人口预测公式，推演 20 年后的老年人口比例，求出能使得 X 满足约束条件的解。同时，综合利用在问题一中建立的人口可持续发展指标体系，对该最优出生率条件下的 20 年后人口结构进行进一步检验。

5.3.1 灰色预测模型的建立

步骤一：数据的检验与处理，设原始数据列为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\dots,x^{(0)}(n))$，计算数列的级比 $\rho(k)=\dfrac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},k=2,3,\dots,n$。

若级比落在可容区间 $X=\left(e^{-\frac{2}{n+1}},e^{\frac{2}{n+1}}\right)$ 内，则数列 $x^{(0)}$ 可建立 $GM(1,1)$ 模型进行灰色预测。

否则进行平移变换，取常数 C 使得 $y^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+C,k=1,2,\dots,n$ 的级比都落在可容区间内。

步骤二：建立 $GM(1,1)$ 模型，若原始数据列满足要求，则在该数据基础上建立 $GM(1,1)$ 模型。

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

用回归分析得到 a，b 的估计值，得到相应白化模型为

$$\frac{dx^{(1)}t}{dt}+ax^{(1)}(t)=b$$

解为 $x^{(1)}(t)=\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-a(t-1)}+\dfrac{b}{a}$ 。

于是得到预测值

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a},k=1,2,\dots,n-1$$

从而相应的得到预测值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=(x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)),k=1,2,\dots,n-1$$

步骤三：检验预测值，计算相对残差

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},k=1,2,\dots,n$$

如果对所有的 $|\varepsilon(k)|\le 0.1$，则认为达到较高要求；如果对所有的 $|\varepsilon(k)|\le 0.2$，则认为达到一般要求。

5.3.2 灰色预测模型的求解

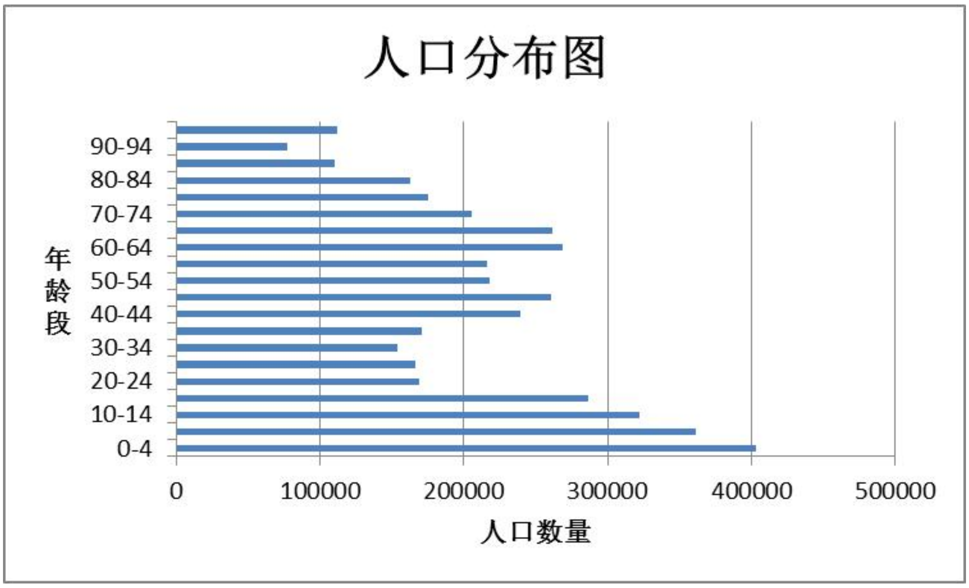
根据附录中表二城乡人口的原始数据、表三出生率和死亡率的原始数据，本文进行灰色预测，得到未来 20 年的预测结果：

表 5-7 未来 20 年的灰色预测结果

	出生率	死亡率	农业人口数（万人）	城镇人口数（万人）
2015	18.478	6.253	33	292
2016	18.293	7.597	34	291
2017	18.103	6.367	35	283
2018	17.913	3.882	35	269
2019	17.725	2.796	36	251
2020	17.539	4.277	36	231
2021	17.357	6.770	37	211
2022	17.178	7.647	37	194
2023	17.002	5.994	38	182
2024	16.829	3.581	38	176
2025	16.660	2.985	39	178
2026	16.493	4.855	40	187
2027	16.330	7.223	40	203
2028	16.170	7.595	41	226
2029	16.013	5.592	41	253
2030	15.859	3.357	42	283
2031	15.707	3.277	42	313
2032	15.559	5.455	43	340
2033	15.413	7.596	43	363
2034	15.270	7.448	43	380

根据灰色预测的出生率、死亡率以及附录中表五的数据，可推算得到第 20 年各年龄段的人口数：

图 5-2 灰色预测得到的人口结构分布



计算得到相对残差$|\varepsilon(k)| \le 0.08$，即灰色预测结果可信。

5.3.3 建立线性约束，求解最优出生率

出生率是指某个国家或地区在一定时期内(通常指一年)出生人口数与平均人口数量之比，它反映了人口的出生水平。本文所指的最优出生率，是能使未来社会避免成为老龄化社会的当年人口出生率。

由于最优出生率为二胎政策下的，因此其一定大于未实行二胎政策时的出生率，并小于所有妇女选择二胎的出生率，得到第一个线性约束：

$$X_1 \le X_2 \le 2X_1$$

其中$X_1 = \dfrac{B*R}{N}$，B为生育率，R为可生育妇女数量，N为人口总数。

并且在最优出生率条件下，20年后的老年人口比例将小于6%，中年人口与少年人口几乎相等。人口年龄结构金字塔大致呈稳定型，未来人口的发展趋势也趋于稳定。

根据上述2个约束条件，利用公式，推演20年后的老年人口比例，求出能使得X_2满足约束条件的解为13.1%。同时，根据问题一中建立的人口可持续发展指标体系，对该最优出生率条件下的20年后的人口结构进行预测，得到的综合评价为第4级。

5.4 问题四模型建立与求解

由于实行二孩政策将会改变A地区人口的原有情况，比如妇女的生育率、婴儿出生率等，因此采用传统的预测方法无法正确预测。为加入二孩政策对人口年龄结构的影响情况，本文采用PDE模型对该地区人口结构进行预测，首先对生育率、出生率等会随时间变化或是受政策影响的参数进行预先设定，得到在新的状态下的参数，并通过生命周期的数学表达式对不同年龄阶段的人口数进行推演，从而得到未来$10-20$年人口的年

龄结构。

5.4.1 可变参数的调整和设定

1）生育率

在未实行二孩政策时，原生育率为B_{bt}。实行二孩政策之后，调整后得到新的生育率为

$$B_{at}=B_{bt}*I_t=B_{nbt1}*2+\sum_{i=2}^{10}B_{nbti} \qquad 式（5-1）$$

其中，B_{at}为二孩政策下的生育率，I_t为调整因子，B_{nbt1}为年龄为n的妇女在未调整政策前生一胎的生育率。

2）死亡率

本文查阅了中国人寿保险业经验生命表，分别对各个年龄段的人数分性别进行数据处理，本文选取该处理结果为计算的基准死亡率。

3）性别比

由于性别比的不平衡会对生育率造成影响，本文参考A地区往年的数据可知，长期以来该地区的男女比一直在1:1附近，且均为男多女少，这对本文计算出生人口不会造成影响，在此本文对性别比不做具体调整。

5.4.2 PDE 模型的建立

生命周期的数学表达式为：

$$P_t=P_{t-1}+P_{bt}-P_{dt}=\sum_{n=1}^{100}P_{n(t-1)}*(1-d_{nt})+\sum_{n=15}^{50}P_{n(t-1)}*R_{n(t-1)}B_{nt}$$

其中，P_t为第 t 年总人口数量，$P_{n(t-1)}$为第$t-1$年年龄为n的人口数量，P_{bt}指第t年出生的人口数量，P_{dt}指第t年的死亡人口数量，d_t指死亡率，d_{nt}指年龄为n的死亡率，R_{t-1}指$t-1$年女性占总人口比例，$R_{n(t-1)}$指$t-1$年年龄为n女性占总人口比例，B_t指生育率，B_{nt}指年龄为n的妇女生育率。

根据本文对式（5-1）中的生育率参数的调整情况，本文可以得到在二孩政策实行情况下各年龄阶段的人口数量表达式：

$$P_t=\sum_{n=1}^{100}P_{n(t-1)}*(1-d_{nt})+\sum_{n=15}^{50}P_{n(t-1)}*R_{n(t-1)}(B_{nbt1}*2+B_{nbti})$$

5.4.2 PDE 模型的求解

通过查阅资料，本文得到 15~49 岁妇女以每 5 岁为一阶段的生育率数据如下表：

表 5-7 育龄妇女年龄组别生育

年龄	生育率（%）
15-19	7.84
20-24	69.53
25-29	93.97
30-34	50.84
35-39	18.68
40-44	4.66
45-49	1.76

根据中国人寿保险业经验生命表，分别对各个年龄段的人数分性别进行数据处理，得到的各年龄段分性别死亡率如下表：

表 5-8 各年龄段分性别死亡率

年龄段	男性死亡率	女性死亡率
0-4	0.0004857	0.0004153
5-9	0.0002922	0.0001814
10-14	0.0002978	0.0001583
15-19	0.0004314	0.0002122
20-24	0.0006410	0.0002923
25-29	0.0007465	0.0003409
30-34	0.0009098	0.0004251
35-39	0.0012161	0.0005765
40-44	0.0017233	0.0008398
45-49	0.0024594	0.0012264
50-54	0.0036237	0.0020265
55-59	0.0056898	0.0035610
60-64	0.0103172	0.0063714
65-69	0.0174941	0.0112489
70-74	0.0295969	0.0200063
75-79	0.0494179	0.0352291
80-84	0.0816993	0.0611249
85-90	0.1334493	0.1049073
90-95	0.2137577	0.1767941
95 以上	0.4172711	0.3688998

并以 A 地区各年龄段的男女人口数量作为基数，将预设参数代入公式可得未来的人口年龄结构，由于表格数据过多，39 岁以上的预测将放在附录 8：

表 5-9 二孩政策下人口年龄分布预测（0-39 岁）

年龄	0-4	4-9	9-14	14-19	19-24	24-29	29-34	34-39
2015	191536	188967	174464	193718	271737	295863	247077	244820
2016	194426	191818	177097	196641	275838	300328	250805	248515
2017	197311	194664	179725	199558	279931	304784	254526	252202
2018	200189	197504	182347	202470	284014	309230	258239	255881
2019	203061	200338	184963	205375	288089	313667	261944	259553
2020	205669	202910	187338	208012	291789	317695	265308	262885
2021	208272	205479	189709	210645	295482	321716	268666	266213
2022	210871	208042	192076	213273	299169	325730	272018	269534
2023	213465	210602	194439	215897	302849	329738	275365	272851
2024	216055	213157	196799	218516	306524	333738	278706	276161
2025	218269	215342	198815	220756	309665	337158	281562	278991
2026	220480	217523	200829	222992	312802	340574	284414	281817
2027	222688	219701	202840	225225	315934	343984	287263	284639
2028	224893	221877	204849	227455	319063	347390	290107	287458
2029	227095	224049	206855	229682	322187	350792	292947	290273
2030	229051	225979	208637	231661	324962	353814	295471	292773
2031	231005	227907	210416	233637	327734	356832	297991	295270
2032	232957	229832	212194	235610	330503	359846	300509	297765
2033	234905	231755	213969	237582	333268	362856	303023	300256
2034	236852	233675	215742	239550	336029	365863	305533	302743

由表中数据可知，随着二孩政策的开放，人口老龄化情况将随着时间的增加而有所减缓。

5.4.3 PDE 模型的检验

用 SQP 算法对 PDE 模型进行优化计算，得到了最优操作参数，验证了 PDE 模型优化算法。为了检验模型在人口预测方面的可靠性，本文进行了数值模拟实验并且将结果与其他经典模型进行了比较，包括 $\log istic$ 模型、莱斯利矩阵模型等。

使用 $Ewiews$ 软件对其他几个预测人口变化的模型参数进行估计，得到各模型的似然函数值、参数个数及 BIC 值：

表 5-10 检验参数值

模型 $\mathrm{mod}\,ule$	1	2	3	4

似然函数值	-3024	-2988	-3358	-3020
参数个数	135	269	30	105
BIC 值	13485	-3679	-3465	-3577

由表可知：模型 4 的拟合度最好，即运用 PDE 模型算法来预测人口结构具有较大的合理性和可行性。PDE 模型较之于其他模型在人口预测方面更优。

5.5 问题五模型建立与求解

问题五为全面放开生育政策下的人口预测，对此本文在问题四的基础上仍采用 PDE 模型，政府政策的改变对人口结构的影响通过调整生育率来实现。

5.5.1 生育率参数的调整和 PDE 模型的建立

由于全面开放生育政策不再限制夫妇生孩子的数量，因此需对生育率进行调整：

$$B_{at} = B_{bt} * I_t = B_{nbt1} * 2.5 + B_{nbt2} * 1.25 + \sum_{i=3}^{10} B_{nbti}$$

人口死亡率仍采用问题三中的灰色预测数据进行，将新政策下的生育率代入式（5-1）得到新政策下的人口公式：

$$P_t = \sum_{n=1}^{100} P_{n(t-1)} * (1 - d_{nt}) + \sum_{n=15}^{50} P_{n(t-1)} * R_{n(t-1)} (B_{nbt1} * 2.5 + B_{nbt2} * 1.25 + B_{nbti})$$

即可对人口进行逐年预测。

5.5.2 PDE 模型的求解

将调整后的生育率和查表所得的死亡率代入公式求解得到：

表 5-11 完全开放生育政策下的人口预测（0-39 岁）

	0-4	4-9	9-14	14-19	19-24	24-29	29-34	34-39
2015	293413	257076	242529	261842	238823	229264	247846	245583
2016	298737	261740	246929	266592	243156	233424	252343	250039
2017	304049	266395	251320	271333	247480	237574	256830	254485
2018	309350	271039	255702	276064	251795	241717	261308	258922
2019	314640	275674	260074	280784	256101	245850	265776	263349
2020	319441	279881	264043	285069	260009	249602	269832	267368
2021	324234	284080	268005	289346	263910	253347	273881	271380
2022	329020	288273	271960	293617	267805	257086	277923	275385
2023	333797	292458	275909	297880	271693	260818	281958	279383
2024	338566	296637	279851	302136	275575	264545	285986	283375

2025	342640	300206	283218	305772	278891	267728	289428	286785
2026	346709	303771	286581	309402	282203	270907	292865	290190
2027	350772	307331	289940	313028	285510	274082	296297	293591
2028	354829	310886	293294	316649	288813	277253	299724	296987
2029	358882	314437	296643	320266	292111	280419	303147	300379
2030	362483	317592	299620	323479	295042	283233	306189	303393
2031	366078	320742	302592	326688	297969	286042	309226	306402
2032	369669	323888	305560	329893	300892	288848	312260	309408
2033	373256	327031	308525	333093	303811	291651	315289	312410
2034	376838	330169	311486	336290	306727	294450	318315	315408

由于数据过多，39 岁以上的预测结果在附录 8 中。

根据表中数据可知，虽然全面放开生育政策在一段中期时间内能有效降低人口老龄化的程度，但是同时青少年的比重将大大加重，会对长期的人口造成一定的就业以及生存负担。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

在解决问题三中有关人口结构的预测及最优出生率的求解问题时，建立了灰色预测模型。解决了对人口结构进行试验的困难，易操作、规范且节约成本，同时明显的解决了人口问题的层次复杂性、结构关系的模糊性、动态变化的随机性、指标数据的不完全性和不确定性。

在解决问题四、五的人口结构预测问题时，建立了 PDE 人口预测模型，其计算公式通俗易懂，用该模型研究未来总人口和人口结构变化的空间很大，重点在于参数的设置。且相比其他模型误差更小，模拟精度更好。

6.1.2 模型的缺点

选择的灰色模糊评价模型不能很好的反映几个指标之间的内在关系，缺少相关性的研究。选择的 PDE 模型中参数之一的死亡率没有考虑随时间的变化性。

6.2 模型的推广

问题三中建立的灰色模糊评价模型可推广于其他评价类问题。问题四、五求解过程中所建立的 PDE 模型可推广于中国人口、世界人口的分析计算。同时可以通过对该模型的求解，对人口政策的制定起到一个参考的作用。

七、参考文献

[1]孟令国，李超令，胡广. 基于 PDE 模型的中国人口结构预测研究[J].《中国人口.资源与环境》，No.16202:132-141.

[2]张彩霞，张婴囡. 河北省区域人口可持续发展综合评价实证分析[J]. 《统计与管理》，No.19106:13-16.

[3]迟国泰，祝志川，张玉玲. 基于熵权-G1法的科技评价模型及实证研究[J].《科学学研究》，2606:1210-1220.
[4]刘维学. 系统评价指标体系与灰色模糊评价模型构建[J].《计算机技术与发展》，No.19810:193-196+200.
[5]李永胜. 人口预测中的模型选择与参数认定[J].《财经科学》，02:68-72.
[6]田飞. 人口预测方法体系研究[J]. 安徽大学学报(哲学社会科学版)，No.19205:151-156.
[7]王会宗，张凤兵. “全面放开二胎”政策可行性的实证分析——基于经济稳定增长视角的中国人口最优出生率研究[J]. 《经济问题》，No.43903:30-35.

八、附录

8.1 附录清单

附录 1：求解问题二模糊综合评价模型隶属度的 C++程序及命令
附录 2：求解问题三灰色预测模型城镇人口比的 Matlab 程序及命令
附录 3：求解问题三灰色预测模型出生率的 Matlab 程序及命令
附录 4：求解问题三灰色预测模型死亡率的 Matlab 程序及命令
附录 5：求解问题三最优出生率的 C++程序及命令
附录 6：问题二中其他五个指标（男女性别比、城市人口率、总抚养比、自然增长率、人口老龄化）的隶属函数
附录 7：中国人寿保险业经验生命表
附录 8：二孩政策下，A 地区 39 岁以上人口预测情况
附录 9：完全放开生育政策，A 地区 39 岁以上人口预测情况

8.2 附录正文

附录 1：求解问题二模糊综合评价模型隶属度的 C++程序及命令

```
#include<iostream>
using namespace std;

int main()
  {
    int j;
    double midu,nn,old,zengzhang,chengzhen,fuyang;
      double yold[6],ynn[6],ychengzhen[6],yzengzhang[6],ymidu[6],yfuyang[6];

         for (j=0;j<5;j++)
     ymidu[j]=0;

         for (j=0;j<5;j++)
```

```
 ynn[j]=0;

    for (j=0;j<5;j++)
 yold[j]=0;

    for (j=0;j<5;j++)
 yzengzhang[j]=0;

    for (j=0;j<5;j++)
 ychengzhen[j]=0;

    for (j=0;j<5;j++)
 yfuyang[j]=0;

cin>>midu>>nn>>old>>zengzhang>>chengzhen>>fuyang;
if (old<4)            //老年比例
   yold[4]=1;
   else
   if ((old>=4)&&(old<6))
   {
   yold[4]=(6-old)/2;
   yold[3]=(old-4)/2;
    }
    else
    if ((old>=6)&&(old<9))
   {
   yold[3]=(9-old)/3;
   yold[2]=(old-6)/3;
    }
    else
    if ((old>=9)&&(old<11))
    {
       yold[2]=(11-old)/2;
       yold[1]=0;
   }
   else
   yold[1]=1;

   if (nn<1)                //男女比例
   ynn[1]=1;
   else
   if ((nn>=1)&&(nn<1.03))
   {
   ynn[1]=0;
```

```
ynn[3]=(nn-1)/0.03;
ynn[4]=(1.03-nn)/0.03;
 }
 else
 if ((nn>=1.03)&&(nn<1.07))
 {
ynn[3]=(1.07-nn)/0.04;
ynn[2]=(nn-1.03)/0.04;
 }
 else
 if (nn>=1.07)
     ynn[2]=1;

if (zengzhang<3)                    // 自然增长率
yzengzhang[1]=1;
else
if ((zengzhang>=3)&&(zengzhang<5))
 {
yzengzhang[4]=(5-zengzhang)/2;
yzengzhang[3]=(zengzhang-3)/2;
 }
 else
 if ((zengzhang>=5)&&(zengzhang<10) )
 {
yzengzhang[3]=(10-zengzhang)/5;
yzengzhang[4]=(zengzhang-5)/5;
 }
 else
 if (zengzhang>=10)
 yzengzhang[2]=1;


if (chengzhen<=25)                          //城镇
ychengzhen[1]=1;
else
if ((chengzhen>25)&&(chengzhen<=45))
 {
ychengzhen[1]=(45-chengzhen)/20;
ychengzhen[2]=(chengzhen-4)/20;
 }
 else
 if ((chengzhen>45)&&(chengzhen<=60) )
 {
ychengzhen[3]=(chengzhen-45)/15;
```

```
ychengzhen[2]=(60-chengzhen)/15;
 }
 else
 if (chengzhen>60)
 {
    ychengzhen[4]=1;
}

if (fuyang<35)                              //总抚养比
yfuyang[4]=1;
else
if ((fuyang>=35)&&(fuyang<44))
{
yfuyang[3]=(44-fuyang)/9;
yfuyang[2]=(fuyang-35)/9;
 }
 else
 if ((fuyang>=44)&&(fuyang<68) )
{
yfuyang[2]=(68-fuyang)/24;
yfuyang[1]=(fuyang-44)/24;
 }
 else
 if (fuyang>=68)
 {
    yfuyang[1]=0;
}

if (midu<10)                               //人口密度
ymidu[1]=1;
else
if ((midu>=10)&&(midu<250))
{
ymidu[1]=(250-midu)/240;
ymidu[2]=(midu-10)/240;
 }
 else
 if ((midu>=250)&&(midu<1000))
{
ymidu[3]=(midu-250)/750;
ymidu[2]=(1000-midu)/750;
 }
 else
 if (midu>=1000)
```

```
        {
            ymidu[4]=1;
        }

    for (j=0;j<4;j++)
    cout<<ymidu[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

        for (j=0;j<4;j++)
    cout<<ynn[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

        for (j=0;j<4;j++)
    cout<<yold[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

        for (j=0;j<4;j++)
    cout<<yzengzhang[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

        for (j=0;j<4;j++)
    cout<<ychengzhen[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

        for (j=0;j<4;j++)
    cout<<yfuyang[j+1]<<' ';
    cout<<endl;

}
```

附录 2：求解问题三灰色预测模型城镇人口比的 Matlab 程序及命令

```
clc
clear
x0=[68.59 69.91 72.17 73.84 75.25 77.32 79.35 80.57 81.86 84.01 85.53 93.71 96.48 100.21 102.22 104.47 105.51 109.1 112.05 121.08 135.44 138.66 149.65 153.73 156.06];
for i=2:25
  x1(1)=x0(1);
x1(i)=x1(i-1)+x0(i);
end
x1
for i=1:24
yn(i)=x0(i+1);
end
```

```
yn
for i=1:24
b(i)=(-0.5)*(x1(i)+x1(i+1));
end
b
for i=1:24
B(i,1)=b(i);
B(i,2)=1;
end
B
c=inv(B'*B)*B'*yn'
a=c(1,1)
u=c(2,1)
for t=1:25
   x11(t)=u/a+exp(-a*t)*(-u+68.59*a)/exp(-a)/a;
end
x11
q0=x1-x11
for i=2:25
  q1(1)=q0(1);
q1(i)=q1(i-1)+q0(i);
end
q1
for i=2:25
  q2(1)=q1(1);
q2(i)=q2(i-1)+q1(i);
end
q2
for i=1:24
b1(i)=(-0.5)*(q2(i)+q2(i+1));
end
b1
for i=1:24
B1(i,1)=b1(i);
B1(i,2)=1;
end
B1
c1=inv(B1'*B1)*B1'*yn'
a1=c1(1,1)
u1=c1(2,1)
syms t
q2t=u1/a1+exp(-a1*t)*(-u1+q2(1)*a1)/exp(-a1)/a1;
D=diff(q2t)
X=u/a+exp(-a*t)*(-u+68.59*a)/exp(-a)/a+D;
```

```
x=1:27
z=-126.9 + 61.05*cos(x*0.3139) -47.13*sin(x*0.3139);
C=1:29;
y=subs(X,t,C)
z2008=vpa(y(3)-y(2)-z(1))
z2009=vpa(y(4)-y(3)-z(2))
z2010=vpa(y(5)-y(4)-z(3))
z2011=vpa(y(6)-y(5)-z(4))
z2012=vpa(y(7)-y(6)-z(5))
z2013=vpa(y(8)-y(7)-z(6))
z2014=vpa(y(9)-y(8)-z(7))
z2015=vpa(y(10)-y(9)-z(8))
z2016=vpa(y(11)-y(10)-z(9))
z2017=vpa(y(12)-y(11)-z(10))
z2018=vpa(y(13)-y(12)-z(11))
z2019=vpa(y(14)-y(13)-z(12))
z2020=vpa(y(15)-y(14)-z(13))
z2021=vpa(y(16)-y(15)-z(14))
z2022=vpa(y(17)-y(16)-z(15))
z2023=vpa(y(18)-y(17)-z(16))
z2024=vpa(y(19)-y(18)-z(17))
z2025=vpa(y(20)-y(19)-z(18))
z2026=vpa(y(21)-y(20)-z(19))
z2027=vpa(y(22)-y(21)-z(20))
z2028=vpa(y(23)-y(22)-z(21))
z2029=vpa(y(24)-y(23)-z(22))
z2030=vpa(y(25)-y(24)-z(23))
z2031=vpa(y(26)-y(25)-z(24))
z2032=vpa(y(27)-y(26)-z(25))
z2033=vpa(y(28)-y(27)-z(26))
z2034=vpa(y(29)-y(28)-z(27))
```

附录 3：求解问题三灰色预测模型出生率的 Matlab 程序及命令

```
clc
clear
x0=[13.5 11.9 11.78 14.42 16.59 15.39 14.21 8.52 8.92 8.77 9.41 10.94 8.31 8.09
9.73 9.8 8.04 15.15 6.92 7.09 6.91 7.91 9.68 10.83 13.14];for i=2:25
  x1(1)=x0(1);
x1(i)=x1(i-1)+x0(i);
end
x1
%对原始数据进行累加
for i=1:24
yn(i)=x0(i+1);
```

```
end
yn
for i=1:24
b(i)=(-0.5)*(x1(i)+x1(i+1));
end
b
for i=1:24
B(i,1)=b(i);
B(i,2)=1;
end
B
%求得数据矩阵B
c=inv(B'*B)*B'*yn'
a=c(1,1)
u=c(2,1)
%通过最小二乘法求出变量a,u
for t=1:25
   x11(t)=u/a+exp(-a*t)*(-u+13.5*a)/exp(-a)/a;
end
x11
%建立时间响应函数
q0=x1-x11
for i=2:25
  q1(1)=q0(1);
q1(i)=q1(i-1)+q0(i);
end
q1
%残差第一次累加
for i=2:25
  q2(1)=q1(1);
q2(i)=q2(i-1)+q1(i);
end
q2
%残差第二次累加
for i=1:24
b1(i)=(-0.5)*(q2(i)+q2(i+1));
end
b1
for i=1:24
B1(i,1)=b1(i);
B1(i,2)=1;
end
B1
c1=inv(B1'*B1)*B1'*yn'
```

```
a1=c1(1,1)
u1=c1(2,1)
syms t
q2t=u1/a1+exp(-a1*t)*(-u1+q2(1)*a1)/exp(-a1)/a1;
D=diff(q2t)
%对二次残差求灰导
X=u/a+exp(-a*t)*(-u+13.5*a)/exp(-a)/a+D;
x=1:27
z=16.61*exp(-0.7938*x) -7.748;
C=1:29;
y=subs(X,t,C)
c2008=vpa(y(3)-y(2)-z(1))
c2009=vpa(y(4)-y(3)-z(2))
c2010=vpa(y(5)-y(4)-z(3))
c2011=vpa(y(6)-y(5)-z(4))
c2012=vpa(y(7)-y(6)-z(5))
c2013=vpa(y(8)-y(7)-z(6))
c2014=vpa(y(9)-y(8)-z(7))
c2015=vpa(y(10)-y(9)-z(8))
c2016=vpa(y(11)-y(10)-z(9))
c2017=vpa(y(12)-y(11)-z(10))
c2018=vpa(y(13)-y(12)-z(11))
c2019=vpa(y(14)-y(13)-z(12))
c2020=vpa(y(15)-y(14)-z(13))
c2021=vpa(y(16)-y(15)-z(14))
c2022=vpa(y(17)-y(16)-z(15))
c2023=vpa(y(18)-y(17)-z(16))
c2024=vpa(y(19)-y(18)-z(17))
c2025=vpa(y(20)-y(19)-z(18))
c2026=vpa(y(21)-y(20)-z(19))
c2027=vpa(y(22)-y(21)-z(20))
c2028=vpa(y(23)-y(22)-z(21))
c2029=vpa(y(24)-y(23)-z(22))
c2030=vpa(y(25)-y(24)-z(23))
c2031=vpa(y(26)-y(25)-z(24))
c2032=vpa(y(27)-y(26)-z(25))
c2033=vpa(y(28)-y(27)-z(26))
c2034=vpa(y(29)-y(28)-z(27))
```

附录 4：求解问题三灰色预测模型死亡率的 Matlab 程序及命令

```
clc
clear
x0=[4.21 4.16 4.2 3.91 4.09 4.17 4.13 3.92 4.4 4.26 4.5 3.44 3.92 4.06 3.77 5.49
3.82 5.21 2.7 3.33 3.34 4 3.1 2.97 8.61];
```

```
for i=2:25
  x1(1)=x0(1);
x1(i)=x1(i-1)+x0(i);
end
x1
for i=1:24
yn(i)=x0(i+1);
end
yn
for i=1:24
b(i)=(-0.5)*(x1(i)+x1(i+1));
end
b
for i=1:24
B(i,1)=b(i);
B(i,2)=1;
end
B
c=inv(B'*B)*B'*yn'
a=c(1,1)
u=c(2,1)
for t=1:25
   x11(t)=u/a+exp(-a*t)*(-u+4.21*a)/exp(-a)/a;
end
x11
q0=x1-x11
for i=2:25
  q1(1)=q0(1);
q1(i)=q1(i-1)+q0(i);
end
q1
for i=2:25
  q2(1)=q1(1);
q2(i)=q2(i-1)+q1(i);
end
q2
for i=1:24
b1(i)=(-0.5)*(q2(i)+q2(i+1));
end
b1
for i=1:24
B1(i,1)=b1(i);
B1(i,2)=1;
end
```

```
B1
c1=inv(B1'*B1)*B1'*yn'
a1=c1(1,1)
u1=c1(2,1)
syms t
q2t=u1/a1+exp(-a1*t)*(-u1+q2(1)*a1)/exp(-a1)/a1;
D=diff(q2t)
X=u/a+exp(-a*t)*(-u+4.21*a)/exp(-a)/a+D;
x=1:27
z=(-1.058+2.295*cos(x*1.082)+0.7928*sin(x*1.082));
C=1:29;
y=subs(X,t,C)
z2008=vpa(y(3)-y(2)-z(1))
z2009=vpa(y(4)-y(3)-z(2))
z2010=vpa(y(5)-y(4)-z(3))
z2011=vpa(y(6)-y(5)-z(4))
z2012=vpa(y(7)-y(6)-z(5))
z2013=vpa(y(8)-y(7)-z(6))
z2014=vpa(y(9)-y(8)-z(7))
z2015=vpa(y(10)-y(9)-z(8))
z2016=vpa(y(11)-y(10)-z(9))
z2017=vpa(y(12)-y(11)-z(10))
z2018=vpa(y(13)-y(12)-z(11))
z2019=vpa(y(14)-y(13)-z(12))
z2020=vpa(y(15)-y(14)-z(13))
z2021=vpa(y(16)-y(15)-z(14))
z2022=vpa(y(17)-y(16)-z(15))
z2023=vpa(y(18)-y(17)-z(16))
z2024=vpa(y(19)-y(18)-z(17))
z2025=vpa(y(20)-y(19)-z(18))
z2026=vpa(y(21)-y(20)-z(19))
z2027=vpa(y(22)-y(21)-z(20))
z2028=vpa(y(23)-y(22)-z(21))
z2029=vpa(y(24)-y(23)-z(22))
z2030=vpa(y(25)-y(24)-z(23))
z2031=vpa(y(26)-y(25)-z(24))
z2032=vpa(y(27)-y(26)-z(25))
z2033=vpa(y(28)-y(27)-z(26))
z2034=vpa(y(29)-y(28)-z(27))
```

附录 5：求解问题三最优出生率的 C++程序及命令

```
#include<iostream>

using namespace std;
```

```
int main()
{
   int i,j,best=0,q;
   long long  old[21],h,n,sum,l,sum1=0,sum2=0,sum3=0,sum4=0;
   double death[21],burn;
    sum=0;
    h=0;
    n=0;
   old[0]=0;
   burn=0;
   death[0]=0;
for(i=1;i<21;i++)
   {
      cin>>old[i];
      sum=old[i]+sum;
   }


    for (i=1;i<21;i++)
   {
      cin>>death[i];
      death[i]=death[i]/1000;
   }
    l=sum;
   for (q=1000;q<1570;q++)
   {
      cout<<q<<' ';
      l=sum;
   for (i=1;i<21;i++)
   {
      burn=q/100000;
      n=sum*burn;
      sum=(sum+h)*(1-death[i]+burn);
      for (j=0;j<21;j++)
       {
         old[j]=(1-death[i])*old[j];
       }
       h=n;
       old[0]=old[0]+n;
       if (i%5==0)
       {
         old[20]=old[20]+old[19];
         for (j=19;j>0;j--)
```

```
            {
                old[j]=old[j-1];
            }
            old[0]=0;
        }
    }
     for (i=14;i<21;i++)
     sum1=old[i]+sum1;

     for (i=1;i<21;i++)
     sum2=old[i]+sum2;

      for (i=1;i<7;i++)
     sum3=old[i]+sum3;

     for (i=7;i<14;i++)
     sum4=old[i]+sum4;

     if((sum1/sum2<0.06)&&(sum3/sum4>0.5))
     {
    best=q;
     }
    }
    cout<<best;

}
```

附录 6：男女性别比、城市人口率、总抚养比、自然增长率、人口老龄化指标的隶属函数

男女比例指标：

$$y_1=\begin{cases}1, x\le 1\\ 0, x\ge 1\end{cases}，\quad y_2=\begin{cases}0, x\le 1.07\\ 1, x\ge 1.07\end{cases}$$

$$y_3=\begin{cases}\dfrac{x-1}{0.03}, 1\le x\le 1.03\\ \dfrac{1.07-x}{0.04}, 1.03\le x\le 1.07\end{cases}，\quad y_4=\begin{cases}0, x\le 1, x\ge 1.07\\ \dfrac{1.03-x}{0.03}, 1\le x\le 1.03\\ \dfrac{x-1.03}{0.04}, 1.03\le x\le 1.07\end{cases}$$

人口老龄化指标：

$$y_1=\begin{cases}\dfrac{x-11}{2},9\le x\le 11\\1,x\ge 11\end{cases}，\quad y_2=\begin{cases}\dfrac{x-6}{3},6\le x\le 9\\\dfrac{11-x}{2},9\le x\le 11\\0,x\ge 11\end{cases}$$

$$y_3=\begin{cases}\dfrac{x-4}{2},4\le x\le 6\\\dfrac{9-x}{3},6\le x\le 9\\0,x\ge 9\end{cases}，\quad y_4=\begin{cases}1,x\le 4\\\dfrac{6-x}{2},4\le x\le 6\\0,x\ge 6\end{cases}$$

城市人口率指标：

$$y_1=\begin{cases}1,x\le 25\\\dfrac{45-x}{20},25\le x\le 45\\0,x\ge 45\end{cases}，\quad y_2=\begin{cases}1,x\le 25,x\ge 100\\\dfrac{x-25}{20},25\le x\le 45\\\dfrac{60-x}{15},45\le x\le 60\end{cases}$$

$$y_3=\begin{cases}0,x\le 45,x\ge 60\\\dfrac{x-45}{15},45\le x\le 60\end{cases}，\quad y_4=\begin{cases}0,x\le 60\\1,x\ge 60\end{cases}$$

总抚养率指标：

$$y_1=\begin{cases}1,x\ge 68\\\dfrac{x-44}{24},44\le x\le 68\\0,x\le 44\end{cases}，\quad y_2=\begin{cases}0,x\ge 68,x\le 35\\\dfrac{68-x}{24},35\le x\le 44\\\dfrac{x-35}{9},35\le x\le 44\end{cases}$$

$$y_3=\begin{cases}0,35\le x\le 44\\\dfrac{44-x}{9},35\le x,x\ge 44\end{cases}，\quad y_4=\begin{cases}0,x\ge 35\\1,x\le 35\end{cases}$$

自然增长率指标：

$$y_1=\begin{cases}0,x\ge 3\\1,x\le 3\end{cases}，\quad y_4=\begin{cases}0,x\ge 10\\0,x\le 10\end{cases}$$

$$y_1=\begin{cases}0, x\geq 10, x\leq 3\\0,44\leq x\leq 68\\0, x\leq 44\end{cases}\ ,\ y_1=\begin{cases}1, x\geq 68\\\dfrac{x-44}{24}, 44\leq x\leq 68\\0, x\leq 44\end{cases}$$

附录 7：中国人寿保险业经验生命表

年龄	男(CL1)	女(CL2)	男(CL3)	女(CL4)
0	0.000722	0.000661	0.000627	0.000575
1	0.000603	0.000536	0.000525	0.000466
2	0.000499	0.000424	0.000434	0.000369
3	0.000416	0.000333	0.000362	0.00029
4	0.000358	0.000267	0.000311	0.000232
5	0.000323	0.000224	0.000281	0.000195
6	0.000309	0.000201	0.000269	0.000175
7	0.000308	0.000189	0.000268	0.000164
8	0.000311	0.000181	0.00027	0.000158
9	0.000312	0.000175	0.000271	0.000152
10	0.000312	0.000169	0.000272	0.000147
11	0.000312	0.000165	0.000271	0.000143
12	0.000313	0.000165	0.000272	0.000143
13	0.00032	0.000169	0.000278	0.000147
14	0.000336	0.000179	0.000292	0.000156
15	0.000364	0.000192	0.000316	0.000167
16	0.000404	0.000208	0.000351	0.000181
17	0.000455	0.000226	0.000396	0.000196
18	0.000513	0.000245	0.000446	0.000213
19	0.000572	0.000264	0.000497	0.00023
20	0.000621	0.000283	0.00054	0.000246
21	0.000661	0.0003	0.000575	0.000261
22	0.000692	0.000315	0.000601	0.000274
23	0.000716	0.000328	0.000623	0.000285
24	0.000738	0.000338	0.000643	0.000293
25	0.000759	0.000347	0.00066	0.000301
26	0.000779	0.000355	0.000676	0.000308
27	0.000795	0.000362	0.000693	0.000316
28	0.000815	0.000372	0.000712	0.000325
29	0.000842	0.000386	0.000734	0.000337
30	0.000881	0.000406	0.000759	0.000351
31	0.000932	0.000432	0.000788	0.000366
32	0.000994	0.000465	0.00082	0.000384

33	0.001055	0.000496	0.000855	0.000402
34	0.001121	0.000528	0.000893	0.000421
35	0.001194	0.000563	0.000936	0.000441
36	0.001275	0.000601	0.000985	0.000464
37	0.001367	0.000646	0.001043	0.000493
38	0.001472	0.000699	0.001111	0.000528
39	0.001589	0.000761	0.001189	0.000569
40	0.001715	0.000828	0.001275	0.000615
41	0.001845	0.000897	0.001366	0.000664
42	0.001978	0.000966	0.001461	0.000714
43	0.002113	0.001033	0.00156	0.000763
44	0.002255	0.001103	0.001665	0.000815
45	0.002413	0.001181	0.001783	0.000873
46	0.002595	0.001274	0.001918	0.000942
47	0.002805	0.001389	0.002055	0.001014
48	0.003042	0.001527	0.002238	0.001123
49	0.003299	0.00169	0.002446	0.001251
50	0.00357	0.001873	0.002666	0.001393
51	0.003847	0.002074	0.00288	0.001548
52	0.004132	0.002295	0.003085	0.001714
53	0.004434	0.002546	0.0033	0.001893
54	0.004778	0.002836	0.003545	0.002093
55	0.005203	0.003178	0.003838	0.002318
56	0.005744	0.003577	0.004207	0.002607
57	0.006427	0.004036	0.004676	0.002979
58	0.00726	0.004556	0.005275	0.00341
59	0.008229	0.005133	0.006039	0.003816
60	0.009313	0.005768	0.006989	0.004272
61	0.01049	0.006465	0.007867	0.004781
62	0.011747	0.007235	0.008725	0.005351
63	0.013091	0.008094	0.009677	0.005988
64	0.014542	0.009059	0.010731	0.006701
65	0.016134	0.010148	0.0119	0.007499
66	0.017905	0.011376	0.013229	0.008408
67	0.019886	0.01276	0.014705	0.009438
68	0.022103	0.014316	0.016344	0.010592
69	0.024571	0.016066	0.018164	0.011886
70	0.027309	0.018033	0.020184	0.013337
71	0.03034	0.020241	0.022425	0.014964
72	0.033684	0.022715	0.024911	0.016787

73	0.037371	0.025479	0.027668	0.018829
74	0.04143	0.028561	0.030647	0.021117
75	0.045902	0.031989	0.033939	0.023702
76	0.050829	0.035796	0.037577	0.026491
77	0.056262	0.040026	0.041594	0.029602
78	0.062257	0.044726	0.046028	0.03307
79	0.068871	0.049954	0.05092	0.036935
80	0.076187	0.055774	0.056312	0.041241
81	0.084224	0.062253	0.062253	0.046033
82	0.093071	0.069494	0.068791	0.051365
83	0.1028	0.077511	0.075983	0.057291
84	0.113489	0.086415	0.083883	0.063872
85	0.125221	0.096294	0.092554	0.071174
86	0.13808	0.107243	0.102059	0.079267
87	0.152157	0.119364	0.112464	0.088225
88	0.167543	0.132763	0.123836	0.098129
89	0.184333	0.147553	0.136246	0.109061
90	0.202621	0.16385	0.149763	0.121107
91	0.2225	0.181775	0.164456	0.134355
92	0.244059	0.201447	0.180392	0.148896
93	0.267383	0.222987	0.197631	0.164816
94	0.292544	0.246507	0.216228	0.182201
95	0.319604	0.272115	0.236229	0.201129

附录 8：二孩政策下，A 地区 39 岁以上人口预测情况

39-44	44-49	49-54	54-59	59-64	64-69	69-74	74-79	79-84
305184	297073	233198	198776	184405	124844	87201	63846	39777
309790	301556	236717	201776	187188	126728	88517	64809	40377
314386	306030	240229	204769	189965	128608	89830	65771	40976
318972	310494	243733	207757	192736	130484	91140	66730	41574
323549	314949	247230	210738	195501	132357	92448	67687	42170
327704	318993	250405	213444	198012	134056	93635	68557	42712
331851	323031	253574	216145	200518	135753	94820	69424	43252
335992	327061	256738	218842	203020	137447	96003	70291	43792
340126	331085	259897	221535	205518	139138	97185	71155	44331
344253	335102	263051	224222	208011	140826	98364	72019	44869
347780	338536	265746	226520	210143	142269	99372	72757	45328
351303	341966	268438	228815	212272	143710	100378	73494	45787
354821	345390	271126	231106	214397	145149	101384	74230	46246
358335	348810	273811	233395	216520	146587	102387	74965	46704

361843	352226	276492	235680	218640	148022	103390	75699	47161
364960	355260	278874	237710	220524	149297	104281	76351	47568
368073	358290	281253	239738	222405	150571	105170	77002	47973
371183	361317	283628	241763	224284	151842	106059	77653	48379
374288	364339	286001	243785	226160	153113	106946	78302	48783
377389	367358	288371	245805	228034	154381	107832	78951	49187

附录 9：完全放开生育政策下，A 地区 39 岁以上人口预测

39-44	44-49	49-54	54-59	59-64	64-69	69-74	74-79	79-84	84-89
238614	264238	233924	199395	184979	125233	87472	64044	6140	10074
242943	269032	238168	203013	188335	127505	89059	65206	6251	10257
247263	273816	242403	206623	191684	129772	90643	66366	6363	10439
251574	278590	246630	210225	195026	132035	92223	67523	6474	10621
255876	283354	250847	213820	198361	134293	93800	68678	6584	10803
259781	287677	254675	217083	201388	136342	95232	69726	6685	10967
263679	291994	258496	220340	204410	138388	96661	70772	6785	11132
267570	296303	262311	223592	207427	140430	98087	71816	6885	11296
271455	300605	266120	226839	210438	142469	99511	72859	6985	84-89
275334	304900	269922	230080	213445	144505	100933	73900	7085	10074
278647	308569	273170	232848	216013	146243	102148	74789	7170	10257
281956	312233	276414	235613	218579	147980	103361	75677	7255	10439
285260	315892	279653	238374	221140	149714	104572	76564	7340	10621
288560	319547	282888	241132	223698	151446	105782	77450	7425	10803
291855	323196	286119	243886	226253	153176	106990	78334	7510	10967
294784	326439	288990	246333	228523	154713	108063	79120	7585	11132

297708	329677	291856	248776	230790	156247	109135	79905	7661	11296
300628	332911	294719	251217	233054	157780	110206	80689	7736	84-89
303545	336141	297579	253654	235315	159311	111275	81472	7811	10074
306458	339367	300434	256088	237573	160840	112343	82254	7886	10257